Антонио Грамши

АЛГЕБРА РИТМОВ

Часть 3

2.2.3 Деформация ритмов

Деформация ритма A деформатором B – это внутренняя перестройка ритма *A*, вызванная действием алгебраического объекта *B*, в результате которой меняются только длительности сигналов ритма *A*, но не их количество и порядок. Если *B* – тоже ритм, то деформация представляет собой бинарную операцию.

2.2.3.1 Деформация первого рода

Рассмотрим бинарную операцию для произвольных однопараметрических ритмов *A* и *B* – *деформацию первого рода*, или просто *деформацию* ритма *A* ритмом *B*. Операция состоит в том, что позиционная запись ритма *A* разбивается на одинаковые по длительности части, число которых равно числу сигналов ритма *B*, после чего каждая часть растягивается путем умножения на длительности сигналов ритма *B*. Если число разрядов ритма *A* не делится на число сигналов ритма *B*, то мы предварительно растягиваем весь ритм *A* умножением на это число. Назовем первый ритм *A* *деформируемым ритмом*, а ритм *B* *деформатором*. Саму операцию будем обозначать греческой буквой “дельта”, δ.

Приведем пример. Допустим, надо найти деформацию ритма *A*=|2,1|=|101| ритмом *B*=|3,2|, то есть найти ритм $R=A\delta B$. В ритме *A* три разряда, а в ритме *B* два сигнала. Так как 3 не делится на 2, растянем предварительно ритм *A* в два раза, получим ритм *A*’=|100010|. Разделим его с помощью точки на две равные части, получим *A’*=|100.010|. Теперь растянем первую часть в 3 раза, а вторую – в два. Окончательно получим $R=A\delta B$=|100000000.001000|=|11,4|. Приведем более сложный пример. Допустим, нужно найти $R=A\delta B$, где *A*=|4,2,2,4,1,1,1,1|=|1000101010001111|, а *B*=|2,1,1|. В ритме *A* 16 разрядов, в ритме *B* три сигнала. Значит, ритм *A* надо предварительно растянуть в 3 раза. В результате получим ритм *A*’=|100000000000100000100000100000000000100100100100|. Теперь разделим его точками на три равные части:

|1000000000001000.0010000010000000.0000100100100100|. Растянем части в соответствии с длительностями сигналов ритма B, окончательно получим ритм R=|10000000000000000000000010000000.0010000010000000.0000100100100100|= |24,10, 6,12,3,3,3,3|. Из приведенных примеров и общих соображений ясно, что ритм, подверженный деформации, сохраняет в целом свою структуру, но длительности сигналов меняются, причем тем сильнее, чем больше отличаются между собой длительности сигналов деформатора. Легко доказать, что если деформатор – вырожденный ритм, то $(A\delta B)\sim A$. В случае если ритм B – простой вырожденный, то есть B=|1|, эквивалентность превращается в строгое равенство. Таким образом, ритм |1| является нейтральным элементом е. Очевидно, что эта операция некоммутативна. Несложно доказать также, что она ассоциативна. Следовательно, множество всевозможных однопараметрических ритмов, на котором задана бинарная операция деформации с нейтральным элементом - простым вырожденным ритмом, - является некоммутативной полугруппой с нейтральным элементом e=|1|.

Можно доказать, что для любого непустого ритма A с n сигналами можно подобрать такой деформатор D, что $(A\delta D)\sim I_n$=|1,1…1|, где I_n - вырожденный ритм из n сигналов. Соответствующий ритм D будем называть *обратным* к A и обозначать его A^{-1}. Например, |3,2|δ|3,5|=|10010|δ|3,5|=|20,20|~|1,1|. Для доказательства достаточно привести алгоритм построения деформатора, который преобразует произвольный ритм A в ритм, эквивалентный вырожденному. Алгоритм этот прост. Ритм A разбивается на части, число которых равно числу его разрядов в позиционной записи, то есть каждая часть содержит один разряд. Пусть число таких частей, то есть разрядов в ритме A, равно n. Теперь строим деформатор, в котором ровно n сигналов. Длительность каждого сигнала ритма D сделаем равной коэффициенту растяжения соответствующей части ритма A так, чтобы в результате деформации получился ритм, эквивалентный вырожденному. Понятно, что этого всегда можно добиться – ведь мы можем с помощью такого деформатора произвольно растягивать каждый разряд ритма A. Это самый простой алгоритм. Соответствующий ритм D будем называть *тривиальным обратным* к A. Но, как видно из приведенного выше примера (|3,2|δ|3,5|=|10010| δ |3,5|=|20,20|~|1,1|), число сигналов в обратном ритме может быть заведомо меньше числа разрядов в деформируемом ритме. Такие обратные ритмы будем называть *нетривиальными*. Поиск всех таких деформаторов, то есть полное решение уравнения $A\ \delta\ X=I_n$ для произвольного ритма A, представляется нам довольно сложной задачей.

Отметим еще одно интересное свойство деформации: эта операция обладает правой дистрибутивностью относительно операции совмещения, то есть $(A+B)\delta C=(A\delta C)+(B\delta C)$. Левая дистрибутивность не соблюдается. Это свойство, а также нейтральный элемент |1| делает деформацию операцией, схожей с умножением. Поскольку речь идет о внутренней перестройке ритма, можно было бы назвать деформацию *внутренним умножением*, а обычное умножение – *внешним умножением*.

Операция деформации естественно обобщается для двухпараметрических ритмов. Взаимодействие деформирующегося и деформируемого сигнала можно описать так же, как в случае умножения. Допустим, i-й фрагмент ритма A деформируется i-м сигналом ритма B. Тогда, если i-й сигнал ритма B низкий, то сигналы i-го фрагмента ритма A не меняют свою высоту, а если он высокий, то меняют на обратный.

2.2.3.2 Деформация второго рода

Деформация второго рода, строго говоря, не является бинарной операцией, но является своеобразным обобщением деформации первого пода. Здесь также имеется деформируемый ритм и деформатор, но последний представляет собой не ритм, а матрицу, составленную из двух ритмов.

Итак, допустим, деформируемый ритм A записан в позиционной записи, и количество разрядов в нем равно n. Деформатор D^{II} (верхний индекс в виде римской цифры II как раз показывает, что деформатор – второго рода) представляет собой следующую матрицу:

B	i_1	i_2	i_3	.	.	.	i_k
C	m_1	m_2	m_3	.	.	.	m_k

Верхняя строчка – это ритм B, записанный в геометрическом виде, $|i_1,i_2,i_3,\ldots i_k|$, который представляет собой некоторое *разбиение* числа n, то есть каждое из чисел i_l $(1\leq l\leq k)$ – натуральное, а их сумма равна n.

Нижняя строчка – это некоторый ритм C, записанный в геометрическом ритме - $|m_1,m_2,m_3,\ldots m_k|$. Независимость ритмов B и C друг от друга –

неполная, так как в них одно и то же количество сигналов. В свою очередь, независимость этих ритмов от ритма A – тоже неполная, так как $k \leq n$.

А теперь перейдем к самой операции. Сначала разобьем ритм A на части в соответствии с разбиением (ритмом) B. После этого растянем каждую часть таким образом, чтобы их длительности были пропорциональны длительностям сигналов ритма C. В результате получим новый ритм R (точнее семейство эквивалентных ритмов). Будем обозначать операцию греческой буквой δ, к которой будем приписывать верхний индекс в виде римской цифры II: $A\delta^{II}D^{II}=R$.

Приведем пример. Пусть A=|1000101010001111|, а D^{II}=

B	4	2	2	4	4
C	3	1	1	2	3

Разобьем ритм A на части в соответствии с B, получим B’= |1000.10.10.1000.1111|. Теперь растянем первую часть в 3 раза, вторую, третью и четвертую – в 2 раза, пятую – в 3 раза. Получим ритм R=|10000000000010001000100000001001001001 00|=|12,4,4,8,3,3,3,3|.

Деформация второго рода используется в музыкальной практике. По сути, триоли, квартоли, квинтоли и т. д. можно рассматривать как результат применения этой операции к группировкам долей.

2.3 Теоретико-множественные операции над ритмами

Для рассмотрения теоретико-множественных операций над ритмами нужно использовать их координатное представление, которое мы описали в первом разделе “Основные понятия”. В таком представлении ритм становится, по сути, упорядоченным множеством, а сигналы со своими порядковыми номерами – его элементами. К таким ритмам можно применять теоретико-множественные операции - как унарные (например, дополнение) и бинарные (объединение, пересечение и др.), так и n-арные.

Особого математического интереса такие операции не представляют, поскольку не привносят ничего нового в теорию множеств. Однако, как нам представляется, они имеют глубокий музыкальный смысл и позволяют лучше понять природу ритма.

Рассмотрим эти операции для однопараметрических отмасштабированных ритмов с одним типом сигнала и одним и тем же числом разрядов.

2.3.1 Объединение ритмов

Несложно показать (предоставляем это сделать читателю), что *объединение ритмов* представляет собой их совмещение, которое мы уже описали в соответствующем разделе. Будем обозначать его таким же знаком, то есть плюсом.

2.3.2 Пересечение ритмов

Будем обозначать эту операцию так же, как и пересечение обычных множеств, то есть “∩”, чтобы подчеркнуть соответствующую аналогию.

Приведем пример, причем для тех же ритмов, которые мы использовали для рассмотрения операции совмещения: A=|101| и B=|1011|. Запишем эти ритмы в отмасштабированном виде один над другим в виде таблицы 2x12:

1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

Верхней строчке таблицы соответствует множество A={1,9}, то есть ритм $|1.9|_{12}$, нижней строчке - множество B={1,7,10}, или ритм $|1.7.10|_{12}$. Очевидно, что A∩B={1}. Иными словами, пересечение ритмов A=|2,1| и B={2,1,1} есть простой вырожденный ритм |1|.

Очевидно, что пересечение, так же как и объединение, является ассоциативной и коммуникативной операцией. Следовательно, она задает полукольцо на множестве всевозможных однопараметрических ритмов с одним и тем же числом разрядов. Но, в отличие от полугруппы по объединению (совмещению), полугруппа по пересечению не имеет нейтрального элемента.

Так же, как и для множеств, соблюдаются дистрибутивные законы: $A \cap (B+C)=(A \cap B)+(A \cap C)$, а также $A+(B \cap C)=(A+B) \cap (A+C)$[1].

Поэтому бинарная операция в паре с объединением (совмещением) задает полукольцо.

2.3.3 Разность ритмов

Разность ритмов A и B, то есть $A \backslash B$, определяется как ритм, в котором остаются лишь те сигналы ритма A, которые не производятся одновременно с сигналами ритма B. Единственное исключение - самый первый сигнал, который всегда должен сохраняться (еще раз подчеркнем, что мы избегаем ситуации, когда ритм начинается с паузы). Например, $|1011| \backslash |1010|=|1.3.4|_4 \backslash |1.3|_4=|1.4|_4=|1001|$.

Очень интересным - с точки зрения музыки – представляется вычитание произвольного ритма R из вырожденного ритма. Эту операцию, по сути – унарную, будем называть, как принято в теории множеств, *дополнением* и обозначать горизонтальной черточкой. Например, $\bar{R}=\overline{|1000101010001111|}$ $=|1111111111111111| \backslash |1000101010001111|=|1111010101110000|$.

Полученный ритм является своеобразным “негативом” исходного – в нем на месте прежних сигналов стоят паузы (за исключением первого сигнала).

2.3.4 Симметрическая разность ритмов

Эта операция соответствует теоретико-множественной симметрической разности: $A \Delta B=(A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Иными словами, ритм C, являющийся симметрической разностью ритмов A и B, состоит из всех сигналов ритмов A и B, исключая те, которые являются общими для ритмов A и B. Единственный сигнал, общий для A и B, который входит в результирующий ритм C – первый.

Например, $|4,2,2| \Delta |1,2,1,2,2|=|1.5.7|_8 \Delta |1.2.4.5.7|_8=|1.2.4|_8$.

2.3 N-арные операции над ритмами

[1] Так как соответствующие равенства выполняются для произвольных множеств.

Напомним, что n-арные алгебраические операции являются естественным обобщением унарных и бинарных, но теперь рассматривается операция над n элементами множества, где n – натуральное число. Дадим точное определение. *N-арной операцией* на множестве M является отображение декартова произведения M^n на само множество M. Иными словами, n-арная операция ставит в соответствие каждому упорядоченному набору из n элементов множества M некоторый элемент этого же множества.

Некоторые n-арные операции можно свести к суперпозиции бинарных[2], но в общем случае этого сделать нельзя. Нам удалось разработать именно такую операцию (не сводимую к суперпозиции бинарных) над ритмами, имеющую глубокий музыкальный смысл и применяемую иногда в скрытой полифонии. Речь идет о *модульном сложении ритмов*.

2.3.1 Модульное сложение ритмов

Как и в случае совмещения, будем рассматривать отмасштабированные ритмы, причем сразу перейдем к двухпараметрическим ритмам. Итак, рассмотрим совокупность n ритмов, имеющих k разрядов: $M=\{R_1, R_2,\ldots R_n\}$. Модульное сложение этих ритмов, $(R_1, R_2,\ldots R_n)\otimes$, осуществляется следующим образом.

Сначала выпишем исходные ритмы, в позиционном виде, друг над другом, причем, сверху выпишем ритм R_1, под ним – ритм R_2 и т. д. Внизу окажется ритм R_n. Получим структуру, которую представим в виде таблицы:

R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}
R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}
…	…	…	…	...
R_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nk}

В левом столбце указаны суммируемые ритмы, в остальных ячейках – соответствующие им сигналы – 1, $\underline{1}$ или 0.

---

[2] Например, смешанное векторное произведение, рассматриваемое как тернарная операция над тремя векторами, сводится к суперпозиции двух различных бинарных операций - векторного и скалярного произведения.

Теперь транспонируем все столбцы вида $|a_{1i}a_{2i}\ldots a_{ni}|$, где i пробегает значения от 1 до k, и выпишем их один за другим, получим следующую строку: $|a_{11}a_{21}..a_{n1}a_{21}a_{22}\ldots a_{n2}\ldots a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kn}|$. Это и будет результирующим ритмом. Очевидно, что модульное сложение не коммутативно.

Этот тип сложения тесно связано с модульной записью ритмов (см. статью “Альтернативные способы ритмической нотации”).

Приведем пример. Произведем модульное сложение над тремя ритмами: $|\underline{1}011$, $|1000|$ и $|\underline{1}001|$, то есть вычислим $(|\underline{1}011|, |1000|, |\underline{1}001|)\otimes$. Выпишем эти ритмы друг над другом, получим следующую таблицу:

$\underline{1}$	0	1	1
1	0	0	0
$\underline{1}$	0	0	1

Транспонируем столбцы и выпишем их один за другим. Окончательно получим: $(|\underline{1}011|, |1000|, |\underline{1}001|)\otimes=|\underline{1}1\underline{1}000100101|=|\underline{1},1,\underline{4},3,2,1|$.

3. Наложение ритмов

Наложением нескольких ритмов, то есть их одновременное исполнение (например, на сильно различающихся между собой по тембру музыкальных инструментах) не является n-арной операцией, так как не приводит к образованию нового ритма, а образует новый объект – *ритмический массив*. Теперь, помимо ракохода, обращения, инверсии, смягчения-заострения и других операторов, мы можем применять такие операции по отношениям к отдельным ритмам из массива, которые не имеют смысла для изолированных ритмов. Они следующие: сдвиг одного ритма относительно другого (если ритмы в массиве одинаковы, то такая операция называется *каноном*) и растяжение-сжатие одного из ритмов массива по отношению к другим (если изначально ритмы одинаковы, то такая пара операций называется *увеличением-уменьшением*). Непревзойденным мастером использования таких операций в полифонической музыке был Иоганн Себастьян Бах. Массивы, составленные из двух ритмов, можно уподобить лентам, симметрия которых подробно исследована кристаллографами (см., например, фундаментальную монографию А. В. Шубникова и В. А. Копцика *Симметрия в науке и искусстве*, Наука, 1972).

4. Громкость и акценты

Возвратимся теперь к внутренним акцентам, которые играют большую роль в музыке. Обобщим множество всевозможных двухпараметрических ритмов, введя новый параметр – *громкость.* Будем считать, что каждому сигналу в ритме соответствует определенное число a из множества целых чисел $Z=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, называемое *числом акцентов* этого сигнала, которое и будет определять его громкость V. Таким образом, громкость так же, как и высота – дискретный параметр. Нулевому числу акцентов соответствует *стандартная громкость* сигнала. Отрицательному числу акцентов соответствует *пониженная громкость*, а положительному – *повышенная громкость*. Акценты удобно выписывать в виде степени над обозначением сигнала (но при этом к операции возведения в степень они, разумеется, не имеют никакого отношения). Нулевой акцент не выписывается. Например, запись $|\underline{4}^2,2,2,\underline{4}^1,1^{-1},1^{-1},1^{-1},1^{-1}|$ означает, что первый низкий сигнал имеет 2 акцента (это самый громкий сигнал), следующие два высоких сигнала имеют нулевые акценты и, следовательно, стандартную громкость, четвертый низкий сигнал имеет один акцент, последние четыре коротких высоких сигнала имеют отрицательный акцент, равный -1, следовательно, они самые тихие. Сразу заметим, что мы по-прежнему считаем сигналы точечными событиями, и акценты относятся именно к этим точечным сигналам. Поэтому вышеприведенный ритм в позиционном виде выглядит следующим образом: $|\underline{1}^2 0001010\underline{1}^1 0001^{-1}1^{-1}1^{-1}1^{-1}|$.

Рассмотренные в предыдущих разделах ритмы имели только стандартную громкость. Первый сигнал, хотя и считался акцентированным по умолчанию, являлся в сущности лишь *условно акцентированным*: его акцент показывал начало ритмического периода, но он совершенно не учитывался в операциях над ритмами. В новом множестве ритмов, которое мы будем называть *трехпараметрическим* (первый параметр – временная координата сигнала, второй – его высота, третий – громкость), акценты, наряду с длительностью и высотой, учитываются почти во всех операциях и порождают новые, интересные операции, связанные именно с громкостью. При этом первый сигнал в ритме не обязательно должен быть громче всех последующих. Отметим также, что громкость в нашей теории, в отличие от длительности сигналов в неполном полукольце ритмов – абсолютный параметр. Это значит, что умножение числа акцентов каждого сигнала в данном ритме на произвольный коэффициент, отличный от единицы, порождает ритм, который считается отличным от исходного.

Как и прежде, будем рассматривать отдельно множество всевозможных трехпараметрических сигналов с первым низким сигналом, или $\underline{R}$’, и аналогичное множество с первым высоким сигналом, или R’. Рассмотрим вначале множество $\underline{R}$’. Операция сложения для трехпараметрических ритмов производится точно так же, как для полугруппы по сложению двухпараметрических ритмов, но при этом осуществляется также поразрядное сложение акцентов. Например, если сложить все те же *Мунооджот* и *Максум*, но уже с акцентированными сигналами, получим: $|\underline{4}^3,2^1,2^1,\underline{4}^2,1,1,1,1|+|\underline{1}^1,2^2,1^1,\underline{2}^1,2^1|=|\underline{1}^3 0001^1 01^1 0\underline{1}^2 0001111|+$
$+|\underline{1}^1 01^2 0001^1 0\underline{1}^1 000\underline{1}^1 000|=|\underline{1}^4 01^2 01^1 01^2 0\underline{1}^3 0001^1 111|=|\underline{2}^4,2^2,2^1,2^2,\underline{4}^3,1^1,1,1,1|$.
Отметим, что акценты в исходных ритмах мы могли бы расставить и иным образом, соответственно, результирующий ритм был бы иным.

При сложении высокого и низкого сигнала в поразрядном сложении ритмов, как известно, получается пауза. Если при этом сумма их акцентов не равна нулю, то получаем акцентированную паузу. На первый взгляд, это кажется нелепостью, но если акцентированную паузу (с отрицательным или положительным акцентом) считать особым типом удара, то можно получить новую, интересную полугруппу по сложению, имеющую, главным образом, прикладное значение для компьютерных программ, генерирующих ритмы. Разумеется, в реальном исполнении ритма акцентированная пауза не отличается от обычной. В позиционной записи их обозначения будут совпадать, то есть акцентированная пауза тоже обозначается нулем, но с указанием числа акцентов в виде степени. В геометрической же записи мы будем представлять акцентированную паузу в виде перечеркнутого посередине числа, указывающего, как и в случае сигналов, длительность паузы: $\cancel{1}$, $\cancel{2}$, $\cancel{3}$ и т. д. Например, $|\underline{2}^1,1,1|+|\underline{3}^2,\underline{1}^1|=|\underline{1}^1 011|+|\underline{1}^2 00\underline{1}^1|=|\underline{1}^3 010^1|=|\underline{2}^3,1,\cancel{1}^1|$. Реальное звучание полученного ритма будет: $|\underline{2}^3,2|=|\underline{1}^3,1|$. Для полученной полугруппы по сложению $\underline{R}$’(+) ритм $|\underline{1}^0|=|\underline{1}|$ по-прежнему будет нейтральным элементом. Совершенно аналогично строится полугруппа R’(+) ритмов с первым высоким сигналом, где нейтральным элементом будет ритм $|1^0|=|1|$. Очевидно, что построенная ранее полугруппа $\underline{R}$(+) является подполугруппой полугруппы $\underline{R}$’(+). В музыкальной практике широко практикуется операция расстановки акцентов для изначально не акцентированных ритмов. Теперь понятно, что эта операция сводится к сумме не акцентированного ритма и акцентированного, причем последний ритм может быть составлен из акцентированных пауз (кроме, разумеется, первого сигнала). Рассмотрим, например, ритм $|\underline{1},1,1,1,1,1,1,1|=|\underline{1}1111111|$. Допустим, мы хотим сделать 1-й, 4-й и 7-й сигналы акцентированными, причем одинаковой громкости, равной одному акценту. Для этого прибавим к исходному ритму новый ритм $|\underline{3}^1,\cancel{3}^1,\cancel{2}^1|=|\underline{1}^1000^1000^10|$. Получим:

$|\underline{1},1,1,1,1,1,1,1|+|\underline{3}^1,\cancel{3}^1,\cancel{2}^1|=|\underline{1}1111111|+|\underline{1}^1000^1000^10|=|\underline{1}^1111^1111^11|=$

$|\underline{1}^1,1,1,1^1,1,1,1^1,1|$. Полученный ритм хорошо известен любителем восточной ритмики – он называется *Мальфуф*. Построим для ритма $|\underline{3}^1,\cancel{3}^1,\cancel{2}^1|$, с помощью которого мы сделали ритм $|\underline{1},1,1,1,1,1,1,1|$ акцентированным, ассоциированный с ним однопараметрический ритм |3,3,2|. Назовем этот ритм *акцентирующим* для ритма $|\underline{1}^1,1,1,1^1,1,1,1^1,1|$. Из этого несложного примера можно легко вывести общее правило расстановки акцентов для произвольного ритма. Такая расстановка хорошо известна барабанщикам, которые строят результирующий ритм как вариацию к базовому, являющийся как раз акцентирующим ритмом. Сама операция называется *акцентированием*. Однопараметрические акцентирующие ритмы применяются лишь в том случае, когда речь идет об акцентах одинаковой громкости равной единице (напомним, что громкость – это абсолютный параметр).

На множестве $\underline{R}$’ трехпараметрических ритмов, начинающихся с низкого удара, можно задать операцию умножения аналогично тому, как мы это делали для множества $\underline{R}$ двухпараметрических ритмов. Операция умножения по-прежнему производится над ритмами, записанными в геометрическом виде. Но, так как акцентированная пауза рассматривается как новый тип сигнала, мы должны задать правила умножения чисел (указывающих тип и длительность сигнала) учитывая и ее. Сделаем это в виде следующей таблицы:

$\cdot$	$\underline{b}$	b	$\cancel{b}$
$\underline{a}$	$\underline{ab}$	ab	$\cancel{\underline{ab}}$
a	ab	$\underline{ab}$	$\cancel{ab}$
$\cancel{a}$	$\cancel{\underline{ab}}$	$\cancel{\underline{ab}}$	$\cancel{\underline{ab}}$

Как и прежде, a и b – длительности сигналов перемножаемых ритмов, соответственно, A и B.

Акценты в перемножаемых ритмах тоже умножаются как обычные целые числа. Приведем пример: $|\underline{2}^{3},\cancel{2}^{1},1,1|\cdot|\underline{2}^{2},1^{-1}|=$

$|\underline{4}^{3x2},\cancel{4}^{1x2},2^{0x2},2^{0x2},2^{3x(-1)},\cancel{2}^{1x(-1)},\underline{1}^{0x(-1)},\underline{1}^{ox(-1)}|=|\underline{4}^{6},\cancel{4}^{2},2,2,2^{-3},\cancel{2}^{-1},\underline{1},\underline{1}|$. Полученный ритм звучит так же, как ритм $|\underline{8}^{6},2,2,4^{-3},\underline{1},\underline{1}|$, который получается, если включить длительности акцентированных пауз в длительности предшествующих им сигналов.

Очевидно, что множество $\underline{R}$’ образует полугруппу по умножению, нейтральным элементом в которой будет ритм $|\underline{1}^{1}|$.

Несложно убедиться также в том, что множество $\underline{R}$’ всевозможных акцентированных ритмов, начинающихся с низкого удара и для которых введены операции сложения и умножения, образуют неполное полукольцо. Акценты в нем не влияют на структуру ритма. Неполное полукольцо R’ строится аналогично.

В связи с практическим использованием параметра громкости в компьютерной программе генерирования ритмов возникает проблема градуировки шкалы реальной громкости. Мы не можем допустить как бесконечно большой, так и отрицательной громкости. Поэтому нам нужно построить такую функцию реальной громкости, которая при увеличении числа положительных акцентов приближалась бы асимптотически к некоторому конечному критическому значению, а при увеличении числа отрицательных акцентов – к нулю. Потребуем, чтобы стандартная громкость при этом была средним из этих значений, то есть равной половине критического значения. Желательно, чтобы искомая аппроксимирующая функция была также симметричной относительно точки стандартной громкости и плавной (то есть, в случае непрерывно изменяющейся громкости – всюду дифференцируемой функцией). На такую роль хорошо подходит функция арктангенса. Если, например, задать верхний порог громкости числом M, а нижний нулем, то функция громкости может быть записана следующим образом:

$V=\frac{M}{\pi}[arctg(a)+\frac{\pi}{2}]$, где V- громкость, a – число акцентов, M – верхний порог громкости. Разумеется, для градуировки кроме арктангенса подходят и многие другие функции.

5. Ритмы с существенными паузами

Можно отказаться от допущения, которым мы пользовались до сих пор, согласно которому сигналы считались точечными событиями. Такое допущение, с одной стороны, упрощает реальное положение вещей (в музыкальной практике звуки имеют определенную протяженность), а, с другой, ограничивает применение математического аппарата в ритмике.

Мой коллега, биофизик и музыкант Артем Дюба предложил рассматривать ритмы, в которых сигнал длится определенное число моментов. Для этого нужно ввести понятие *существенных пауз*. В позиционной записи начало существенной паузы обозначается нулем со штрихом 0’; в геометрической записи число моментов, в течение которых длится пауза, обозначается натуральным числом со штрихом. Например, позиционная запись ритмического рисунка [1000101010001111], в который мы вводим существенные паузы, укорачивающие первый сигнал на два момента, а третий и четвертый сигнал на один момент, будет выглядеть следующим образом: [100’01010’1000’1111]. Соответствующая ему геометрическая запись будет выглядеть так: |2,2’,2,1,1’,3,1’,1,1,1,1].

Важнейшим следствием такого подхода является то обстоятельство, что теперь мы можем допускать существование ритмов, начинающихся с существенных пауз (до сих пор мы исключали из рассмотрения ритмы, начинающиеся с пауз) - ведь теперь существенная пауза становится, по сути дела, разновидностью сигнала.

6. Ритмы в непрерывном времени

Ритмы в непрерывном времени – это естественное обобщение ритмов в дискретном времени, которыми мы занимались до сих пор. В непрерывном времени точечные сигналы могут располагаться в любой точке непрерывного отрезка времени. Понятно, что для таких ритмов позиционная запись не имеет смысла, поэтому будем пользоваться только геометрической записью, в которой каждое число, как и прежде, обозначает промежуток времени, прошедший от данного сигнала до предыдущего. Рассмотрим однопараметрические ритмы, в которых единственным параметром является момент времени, когда производится сигнал.

Сложение (совмещение и конкатенация) и умножение производятся аналогично тому, как мы производили эти операции в дискретном времени. Правда, операция предварительного масштабирования ритмов, необходимая для их наложения, нуждается в некотором уточнении. Итак, если имеются ритмы $A=|a_1,a_2,..a_n|$ и $B=|b_1,b_2,\ldots b_m|$, которые мы собираемся совместить друг с другом, то масштабирование состоит в приведении их к единичной длине временного отрезка. Ритм A преобразуется при этом в пропорциональный ему ритм $A^1=|\frac{a_1}{\sum_n^1 a_i},\frac{a_2}{\sum_n^1 a_i},\ldots\ \frac{a_n}{\sum_n^1 a_i}|$, а ритм B – в ритм $B^1=|\frac{b_1}{\sum_m^1 a_i},\frac{b_2}{\sum_m^1 a_i},\ldots\ \frac{a_m}{\sum_m^1 a_i}|$. Теперь, рассматривая эти ритмы как множества точек на единичных отрезках времени, осуществим их совмещение, объединяя соответствующие множества точек.

Несложно расширить множество однопараметрических ритмов в непрерывном времени до множества двухпараметрических (с дополнительным параметром высоты сигнала) и трехпараметрических ритмов (с дополнительными параметрами высоты и громкости сигнала). В последнем случае параметр громкости тоже можно сделать непрерывным. Можно также скорректировать унарные операции, чтобы они имели смысл для таких ритмов. Это тема отдельного исследования.